極方程式と面積，曲線の長さ

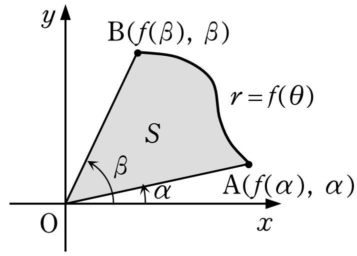
面積と曲線の長さ

極方程式 $r=f(\theta)$（$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$）で表される曲線 C と，極方程式 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ で表される 2 直線で囲まれた部分の面積 S と曲線 C の長さ L は，

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(\theta)\}^2 d\theta \quad , \qquad L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\{f(\theta)\}^2+\{f'(\theta)\}^2}\, d\theta$$

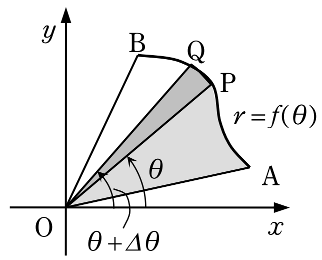
で表される。

〔**解説**〕曲線 C と 2 直線 $\theta=\alpha$, $\theta=\theta_1$ で囲まれた部分の面積 $S(\theta_1)$ とし，曲線 C の長さを $L(\theta_1)$ とする。



また，θ の増分 $\Delta\theta$ に対する r の増分を Δr，$S(\theta)$，$L(\theta)$ の増分をそれぞれ ΔS，ΔL とする。極座標 $(f(\alpha), \alpha)$, $(f(\beta), \beta)$ で表される点をそれぞれ A，B，極座標 (r, θ)，$(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$ で表される点をそれぞれ P, Q とする。

まず，面積について考えてみると，区間 $\theta \leqq t \leqq \theta+\Delta\theta$ における r の最大値を M_r，最小値を m_r とすれば，



$\Delta\theta>0$ のとき，$\Delta S=S(\theta+\Delta\theta)-S(\theta)$ より

$$\frac{1}{2}m_r^2\Delta\theta \leqq \Delta S \leqq \frac{1}{2}M_r^2\Delta\theta$$

（半径がそれぞれ m_r，M_r で，中心角が $\Delta\theta$ の扇形の面積と比較）

が成立する。よって，　$\displaystyle \frac{1}{2}m_r^2 \leqq \frac{\Delta S}{\Delta\theta} \leqq \frac{1}{2}M_r^2$

ここで，$\Delta\theta \to 0$ とすると，$m_r \to r$, $M_r \to r$ だから，　$\displaystyle \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\theta}=\frac{1}{2}r^2$

すなわち $S'(\theta)=\dfrac{1}{2}\{f(\theta)\}^2$ だから　　$\displaystyle S=S(\beta)-S(\alpha)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(\theta)\}^2 d\theta$

次に，曲線の長さについて考える。$\mathrm{PQ}=\Delta s$ とおくと，余弦定理より

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= r^2+(r+\Delta r)^2-2r(r+\Delta r)\cos\Delta\theta \\ &= 2r(r+\Delta r)-2r(r+\Delta r)\cos\Delta\theta+(\Delta r)^2 \\ &= 2r(r+\Delta r)(1-\cos\Delta\theta)+(\Delta r)^2\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right)^2 = 2r(r+\Delta r)\frac{1-\cos(\Delta\theta)}{(\Delta\theta)^2}+\left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2$$

ここで，$\Delta\theta\to 0$ とすると，

$$\frac{1-\cos\Delta\theta}{(\Delta\theta)^2}\to\frac{1}{2}, \qquad \frac{\Delta r}{\Delta\theta}\to f'(\theta)$$

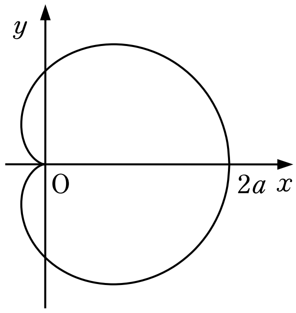
となり，$\dfrac{\Delta L}{\Delta s}\to 1$ であることから，

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta L}{\Delta\theta}=\sqrt{\{f(\theta)\}^2+\{f'(\theta)\}^2}$$

よって，$\displaystyle L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\{f(\theta)\}^2+\{f'(\theta)\}^2}\, d\theta$ ∎

例題　カージオイド $r=a(1+\cos\theta)$（$a>0$）で囲まれる部分の面積と周の長さを求めなさい。

〔**解答**〕x 軸に関して対象であることから，囲まれた部分の面積 S は



$$
\begin{aligned}
S &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta \\
&= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta \\
&= a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\
&= a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2
\end{aligned}
$$

曲線の長さ L は，$\dfrac{dr}{d\theta}=-a\sin\theta$ より

$$
\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta \\
&= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta \\
&= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \\
&= 2a\int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2a\left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8a
\end{aligned}
$$